



中山大學心理學系
DEPARTMENT OF PSYCHOLOGY
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

基于贝叶斯估计的结构方程模型

报告人：张沥今

指导教师：潘俊豪副教授

中山大学心理学系

2019.5.25, 第12届中国R会议心理学专场, 北京

目录

01 | 结构方程模型

02 | 贝叶斯估计

03 | 贝叶斯验证性因子分析

04 | 实例演示



中山大學 心理學系
DEPARTMENT OF PSYCHOLOGY
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

1 结构方程模型

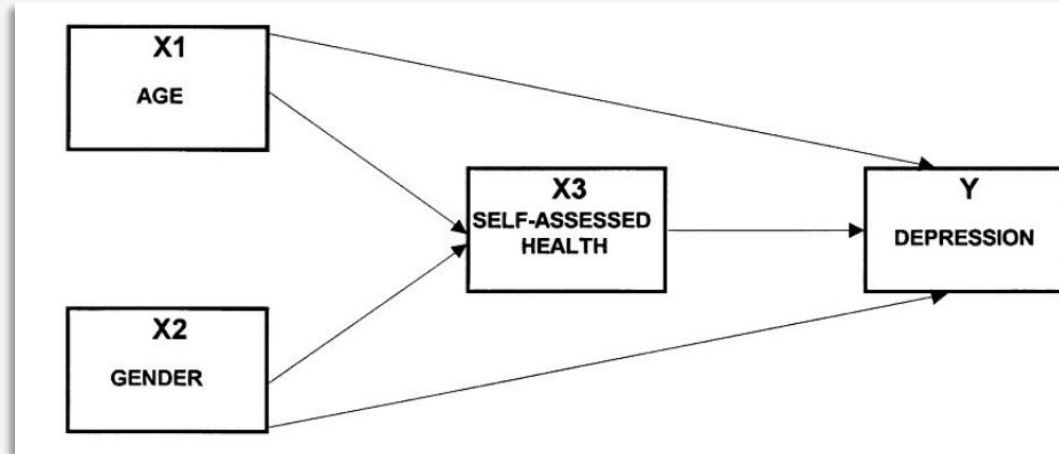


路径分析(Path Analysis)

局限：没有考虑测量误差

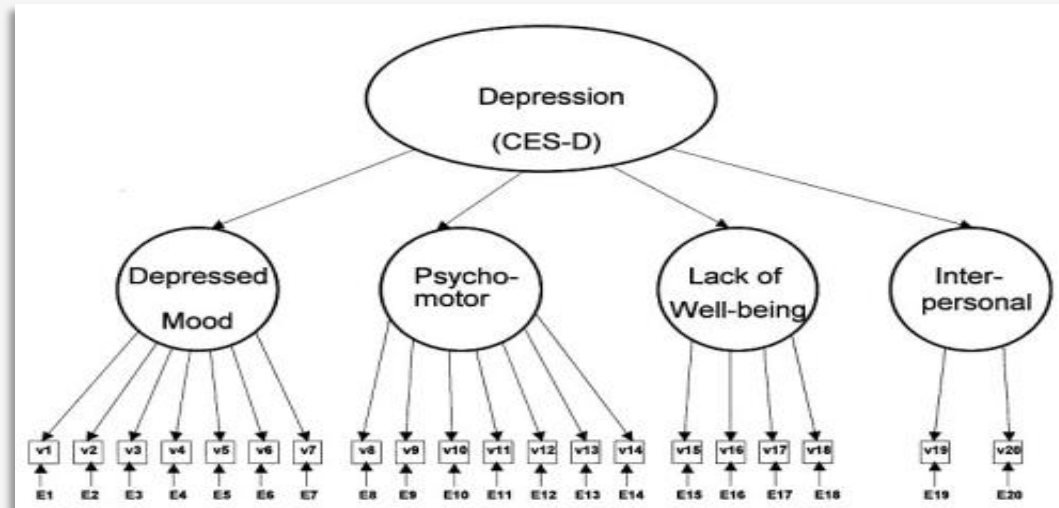
潜变量(Latent Variables)

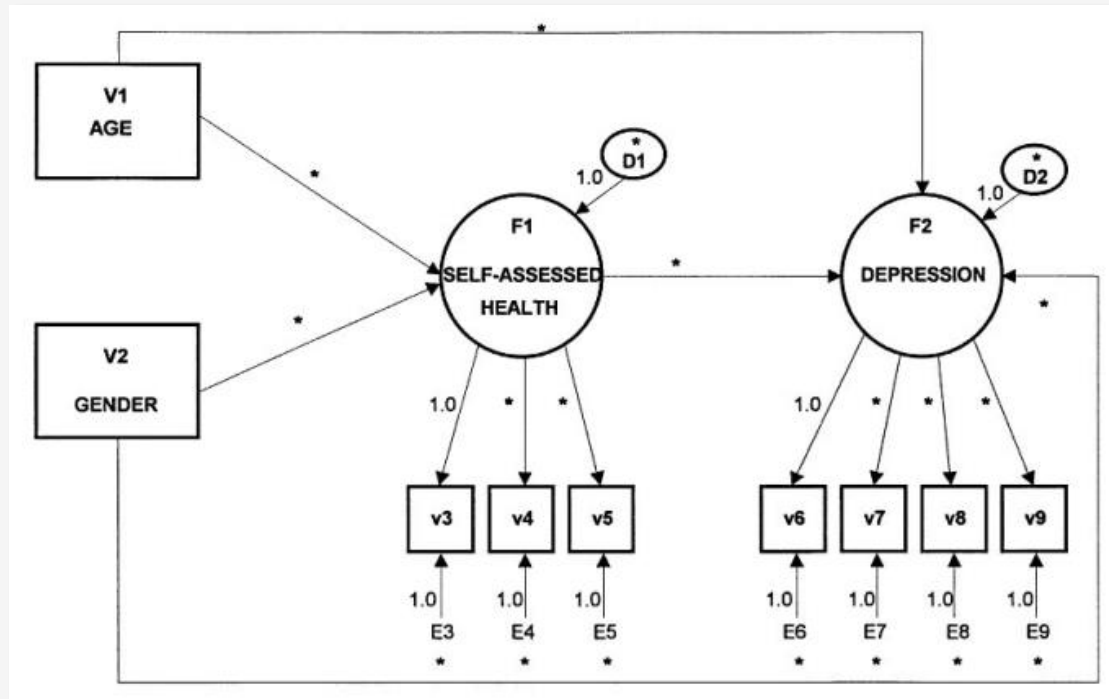
外显变量(Manifest Variables)



• 验证性因子分析(Confirmatory Factor Analysis, CFA)模型

• 一个观察指标的测量可以分为因子测量和测量误差两部分





- 结构方程模型(Structural Equation Modeling, SEM)
=验证性因子分析+路径分析
- 传统的SEM包括测量模型和结构模型两个部分
- SEM是公认的用于分析潜变量间关系最强有力的现代统计方法
(侯杰泰, 温忠麟, 成子娟, 2004; Lee & Song, 2012; 王孟成, 2014)

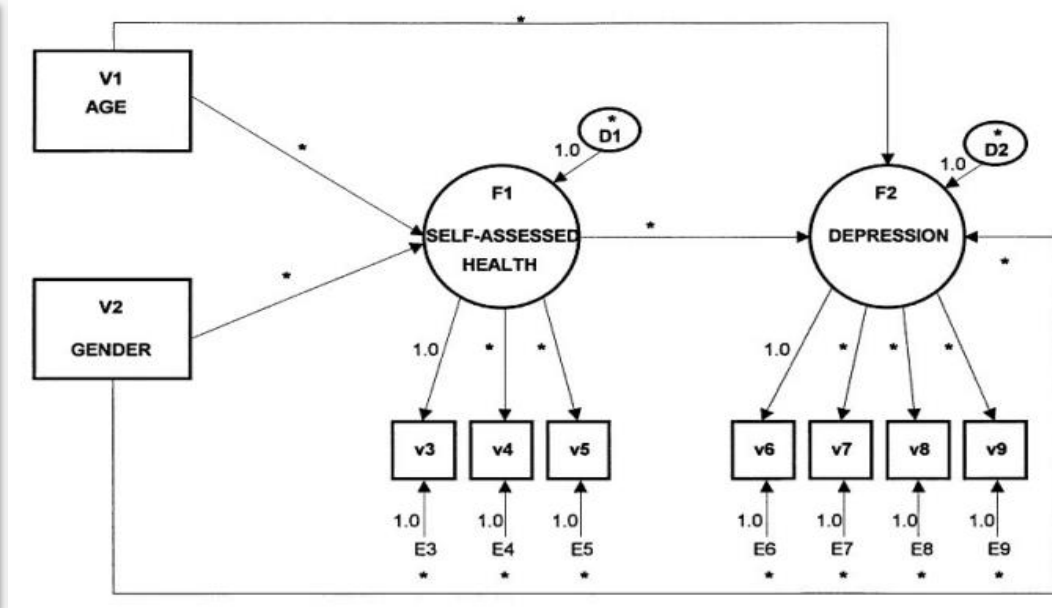
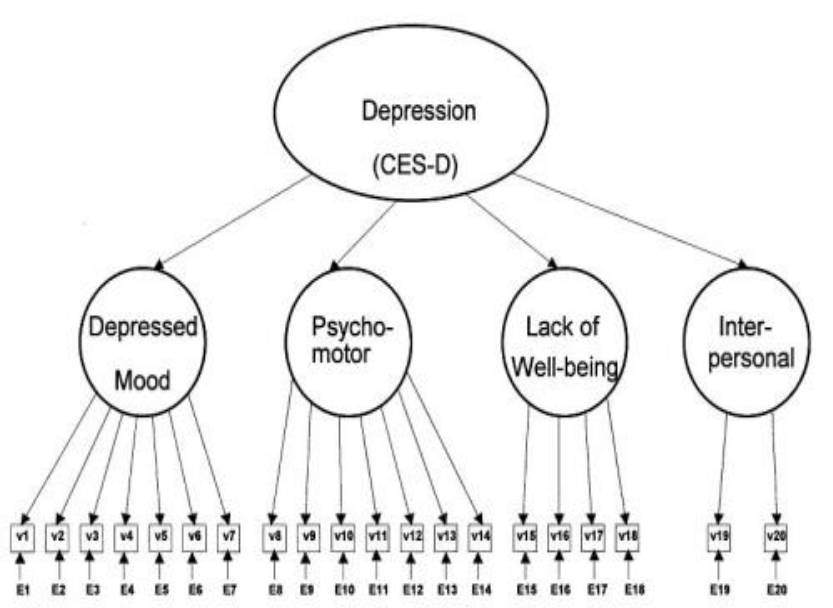


分析步骤:

模型设定与识别

模型拟合评估

χ^2 , CFI, TLI, RMSEA...





分析步骤:

模型设定与识别

模型拟合评估

χ^2 , CFI, TLI, RMSEA...

模型修正

结合理论和修正指数(Modification Index)的建议进行

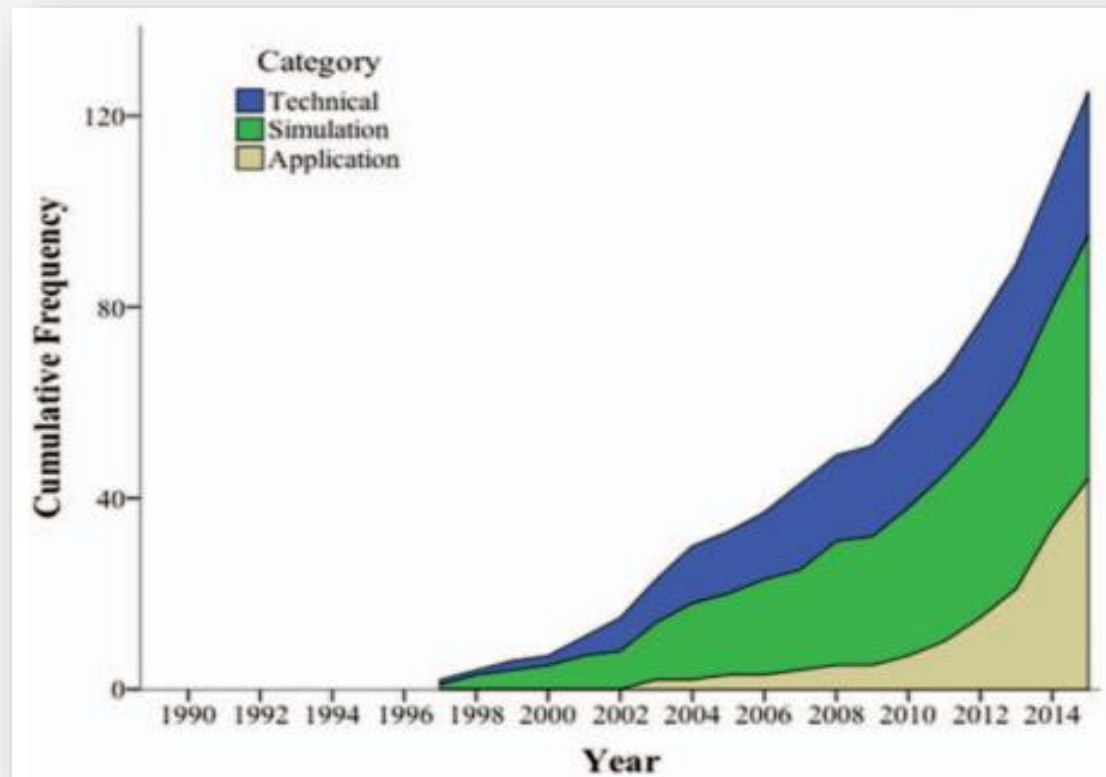
参数估计



模型估计

频率学派方法(如, 极大似然估计)

贝叶斯方法



(Van de Schoot et al., 2017)



中山大學 心理學系
DEPARTMENT OF PSYCHOLOGY
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

2 贝叶斯估计



贝叶斯估计

- 贝叶斯方法和频率学派方法本质的区别是
频率学派将未知参数看作**常数**；
贝叶斯方法则将未知参数视为**随机变量**；
- 贝叶斯估计需要结合**先验信息**和**数据似然函数**，得到未知参数的**后验分布**。
- 研究者可以根据理论或以往研究结果确定未知参数或潜变量的先验分布。
- 如果没有准确的先验信息也可以提供无信息先验分布(如，均匀分布)或模糊信息先验分布(如，方差极大的正态分布)。



Prior

Likelihood

Posterior

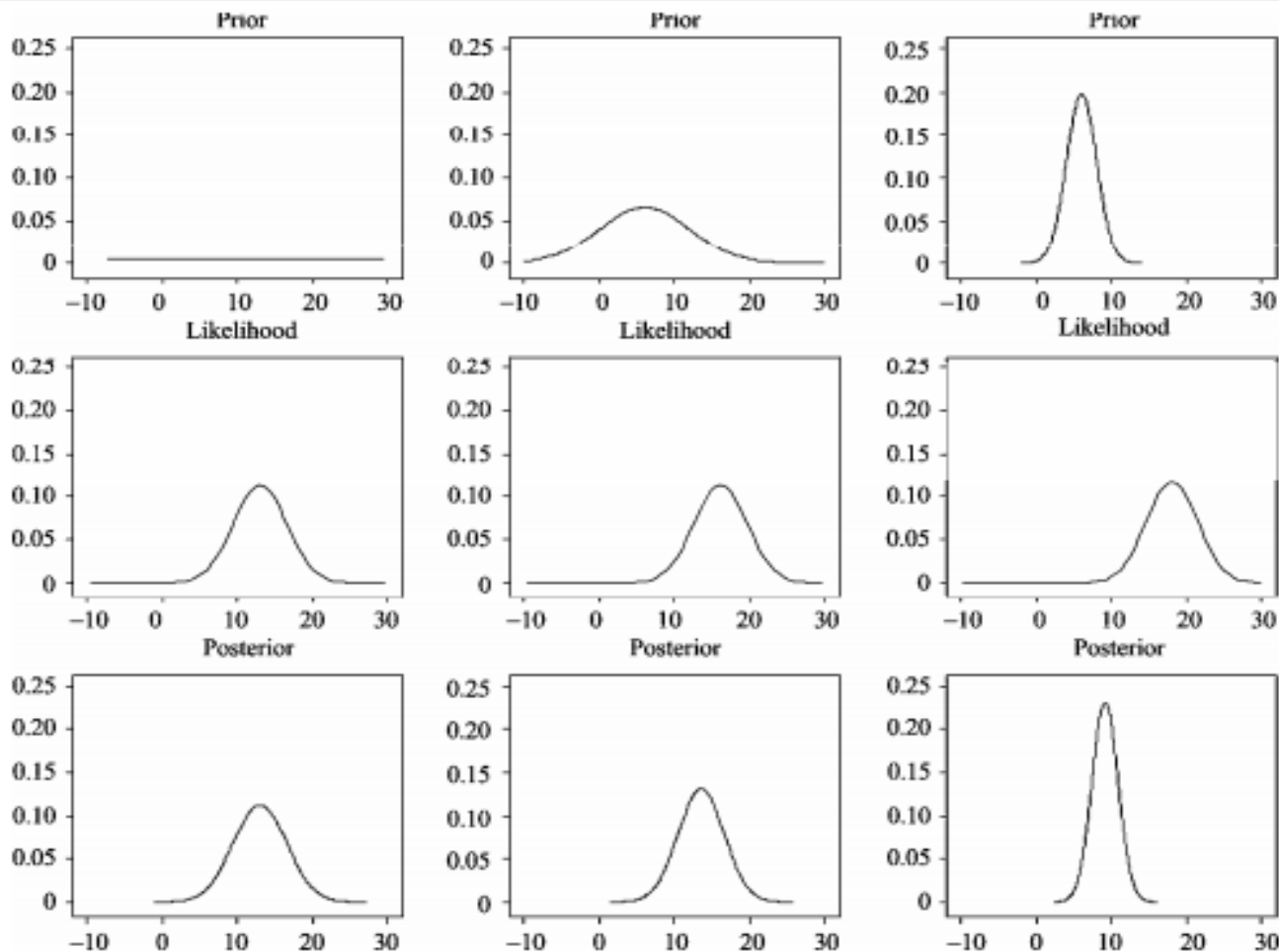


图1 不同先验信息对后验分布的影响示意图(Yuan & MacKinnon, 2009)

敏感性分析(Sensitivity Analysis; Greenland, 2001)



- 采用贝叶斯方法分析 SEM 的具体步骤包括：

(1) 设定模型并为参数提供先验信息

- 令 $k = 1, \dots, p$; $h = 1, \dots, q$, 对于 SEM 中不同的参数提供如下所示的共轭先验分布(李锡钦, 2011):

$$\boldsymbol{\mu} \sim N(\boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{H}_{\mu_0})$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_k \sim N(\boldsymbol{\Lambda}_{0k}, \mathbf{H}_{0k})$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\omega h} \sim N(\boldsymbol{\Lambda}_{0\omega h}, \mathbf{H}_{0\omega h})$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1} \sim \text{Wishart}(\mathbf{R}_0, \rho_0)$$



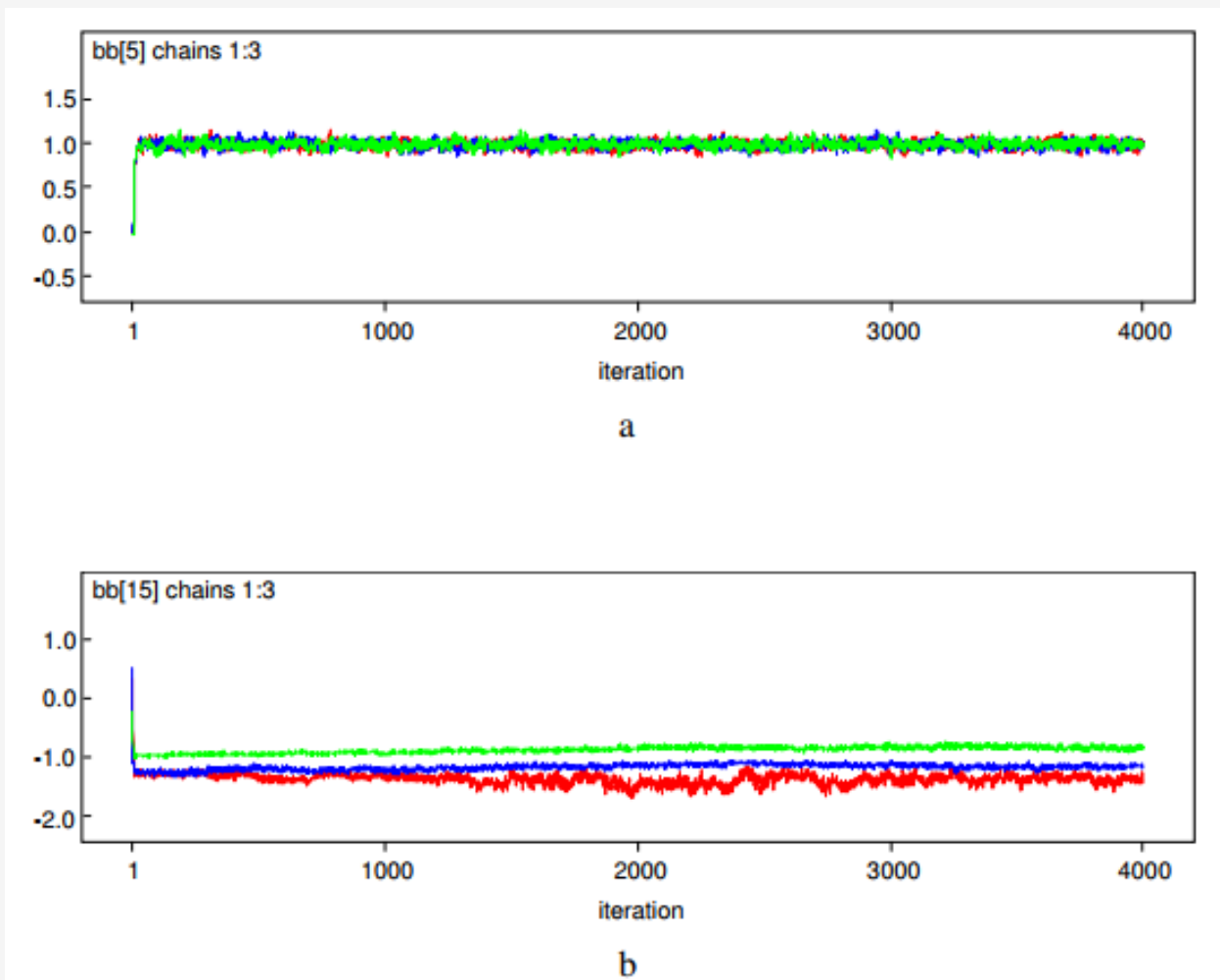
(2) 采用马尔科夫链蒙特卡罗(Markov chain Monte Carlo, MCMC)算法从后验分布中迭代地抽取大量样本

- 设定MCMC算法迭代次数，在其收敛后进行模型拟合评估和参数估计
- 算法是否达到收敛可以通过自相关图，踪迹图和潜在尺度缩减因子(Estimated potential scale reduction, EPSR)进行评估
- 通过抽取的样本估计后验分布的均值、可信区间(Credible Interval)及其它统计量



收敛性判断

Parallel sequences





(3) 后验预测检验(Posterior Predictive Checking)

- 后验预测检验比较了实际数据与假设模型产生的数据之间的差异，可以用于评估模型和实际数据的拟合程度(Gelman, Meng, Stern, & Rubin, 1996)
- PPp 值指在MCMC算法多次迭代中依据理论模型生成的统计检验量大于样本数据的统计检验量的比例
- 样本数据的检验统计量 $T(y)$
- MCMC算法多次迭代中依据理论模型生成的统计检验量
- $T(y_1^{rep}), T(y_2^{rep}), \dots, T(y_n^{rep})$



(3) 后验预测检验(Posterior Predictive Checking)

- PPp 值在 0.5 左右，即接近随机概率 1/2 时
- PPp 不能用于模型比较
- 后验预测检验区间：
 - 样本数据与模型生成数据之间统计检验量差异的 95% 可信区间
 - 下限为负数，且 0 落在区间中心时

(4) 敏感性分析(Sensitivity Analysis; Greenland, 2001)



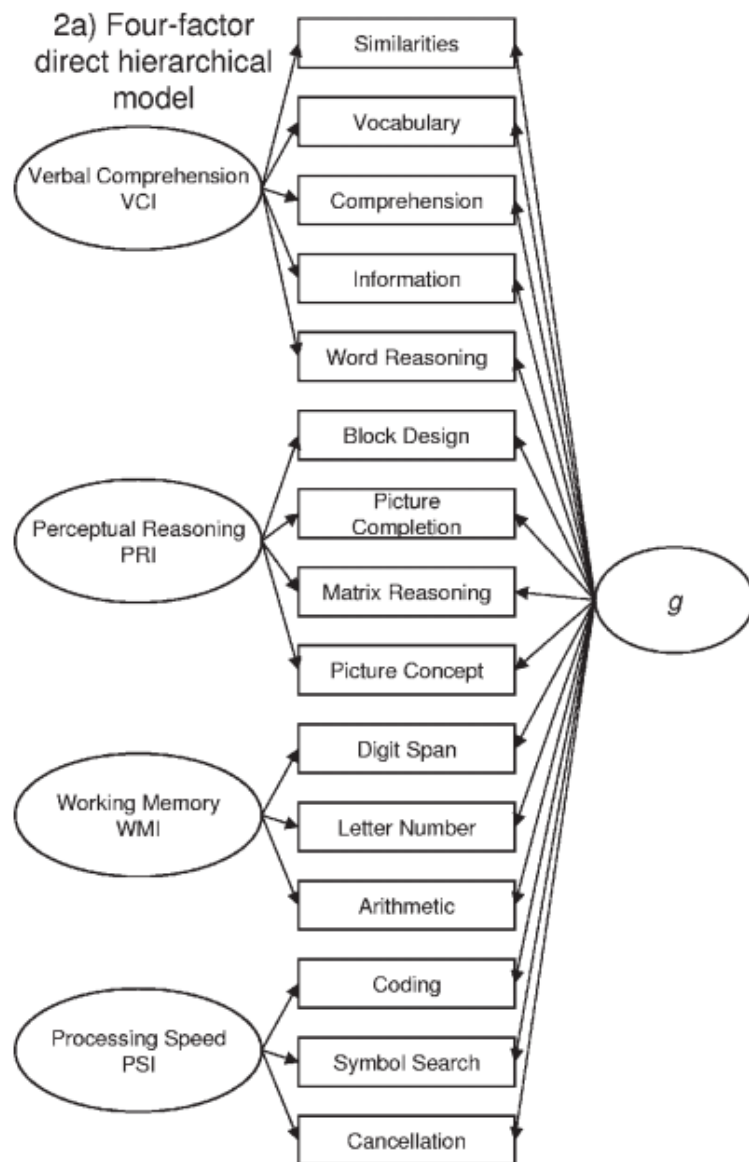
和传统方法相比，贝叶斯结构方程模型有着诸多优势：

1. 在小样本中表现优良(Muthén & Asparouhov, 2012)
2. 更易处理更易于处理复杂的模型和数据情况(李锡钦, 2011)
3. 在模型拟合评估、模型比较和参数估计方面贝叶斯方法能够提供更有效的统计量(Pan, Ip, & Dubé, 2017)
4. 贝叶斯方法能够灵活地在模型估计中纳入先验信息 (Yuan & MacKinnon, 2009)



基于贝叶斯方法在处理复杂模型时的优良特性 (李锡钦, 2011)

- Golay, Reverte, Rossier, Favez和Lecerf (2013) 重新分析了韦氏智力量表的四因子结构
- 分别检验了二阶因子模型和双因子(Bifactor)模型
- 结果显示贝叶斯方法在模型识别和估计上都比极大似然估计表现更好





由于小样本中贝叶斯方法对于参数的估计更加准确(Muthén & Asparouhov, 2012)

- Crenshaw等人(2016)在临床的小样本研究中使用贝叶斯CFA方法修订了沟通模式量表(52名被试, 模型有18个未知参数, 包括9个因子载荷和9个误差方差);

由于与传统极大似然估计方法相比, 贝叶斯方法在小样本的情况下对因子分的估计更加准确(Muthén & Asparouhov, 2012)

- Alessandri和De Pascalis(2017)在脑电实验研究中采用贝叶斯CFA估计51名被试“生活导向”因子的因子分, 再用于后续因子间关系的分析中。



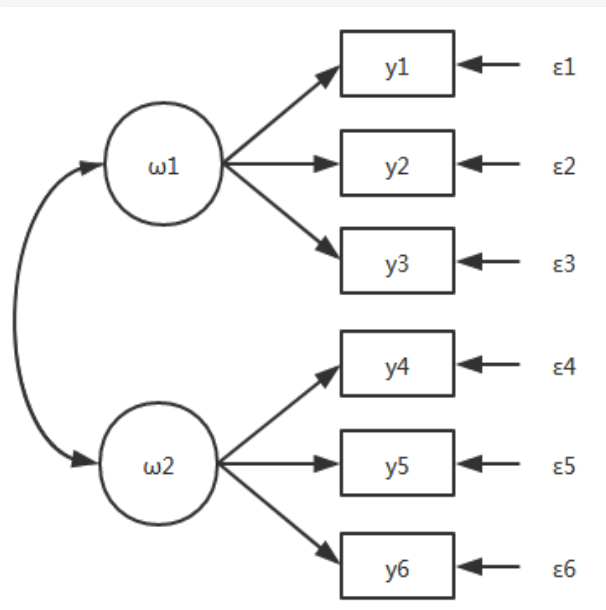
中山大學 心理學系
DEPARTMENT OF PSYCHOLOGY
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

3 贝叶斯验证性因子分析



- 验证性因子分析常被用于根据理论假设去验证外显变量和潜变量间的关系
- 设定 $\mathbf{y}_i (p \times 1)$ 为第 i 个被试在 p 个相关的外显变量上的观测值:

$$\mathbf{y}_i = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad i=1,2, \dots, n,$$



$$\begin{pmatrix} \psi_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_{1,2} & 0 \\ \lambda_{1,3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \lambda_{2,4} \\ 0 & \lambda_{2,5} \end{pmatrix}$$

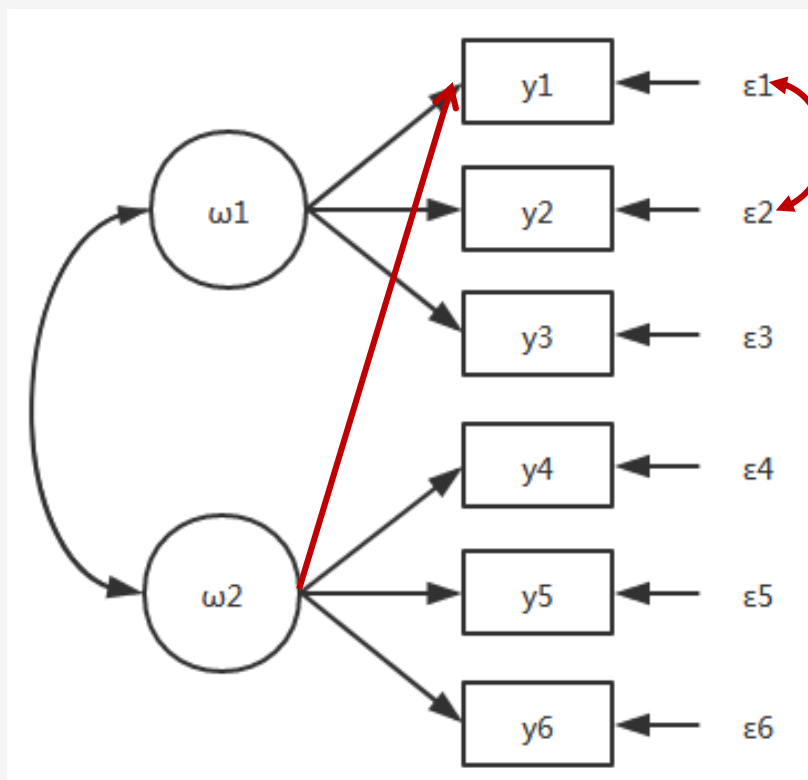


- 一些研究者指出传统方法对模型施加的限制是过于严格的、甚至是不必要的：
- 在大样本情况下很容易拒绝实际上和数据拟合良好的模型(Lu, Chow, & Loken, 2016; Marsh et al., 2009; Muthén & Asparouhov, 2012);
- 在实际数据分析中对模型添加过多的约束条件会导致参数估计的准确性降低 (Asparouhov & Muthén, 2009; Hsu, Troncoso Skidmore, Li, & Thompson, 2014)



修正指数

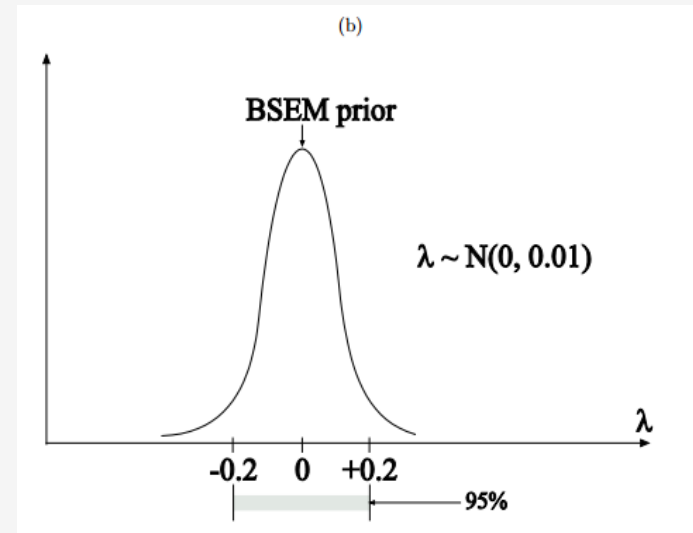
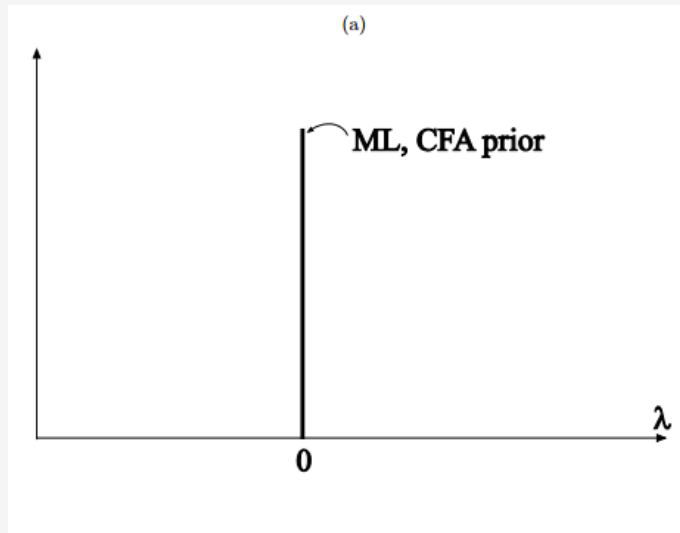
结合理论和修正指数(Modification Index; Sörbom, 1989)的建议，在模型中增加交叉载荷或残差相关





局限

1. 需要逐个参数进行修正，当需要修正的参数较多时实施起来耗时、繁琐；
2. 容易导致模型的过拟合，削弱其泛化能力(Maccallum, Roznowski, & Necowitz, 1992)；
3. 难以找到全局最优的模型(Chou & Bentler, 1990)；
4. 容易导致一类错误率增大(Draper, 1995)等。



放宽对于残差相关或交叉载荷的限制(Muthén & Asparouhov, 2012)

对交叉载荷提供一个均值为0、方差极小的正态先验分布

对误差项矩阵提供合适的逆Wishart分布

模拟研究显示该方法得到的显著的交叉载荷或残差相关的数目更少

模型拟合在一次分析中就可以得到满意的结果



局限

Muthén和Asparouhov (2012)的方法在放宽对模型限制的同时，依然会产生较多非零交叉载荷或残差相关(Lu, Chow, & Loken, 2016)

- ☞ 使得因子载荷矩阵或误差项矩阵过于复杂
- ☞ 模型容易出现过拟合的情况
- ☞ 对研究结果的解释和重复造成困难



1

对载荷矩阵提供spike-and-slab先验分布 (Lu, Chow, & Loken, 2016)

保留重要的交叉载荷，将其它微弱的交叉载荷压缩到零

避免了Muthén和Asparouhov(2012)的方法可能导致的模型过拟合

及其对重要交叉载荷的过度压缩等问题

2

贝叶斯Lasso CFA (Pan, Ip, & Dubé, 2017)

- 针对误差项的方差协方差矩阵引入协方差Lasso正则化方法
- 在放宽对残差相关限制的同时，将微弱的、不重要的残差相关向零压缩
- 避免因为残差相关过多而导致模型过拟合，或误差项矩阵不正定等问题
- blcfa软件包



中山大學 心理學系
DEPARTMENT OF PSYCHOLOGY
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

4 实例演示



- 被试

- 共收集353名本科大学生被试。其中男生89名
- 平均年龄为19.55岁($SD = 1.45$, range:17-24)

- 测量工具

- 大学生生涯适应力量表（赵小云，2015）：35个条目，5点计分
- 问卷的内部一致性系数为0.933
- 包括生涯人际、生涯调适、生涯自信、生涯关注、生涯好奇、生涯控制六个维度。6个维度的内部一致性系数分别为0.878、0.725、0.845、0.799、0.827和0.678

- 分析工具：Mplus 8.0, SPSS 20.0



极大似然估计

- 峰度偏度分析
 - 各条目的偏度在-0.676到0.544之间，峰度在-0.774到0.721之间
 - 数据中不含缺失值
 - 采用极大似然法(Maximum Likelihood, ML)进行模型估计
- 模型拟合标准
 - $\chi^2/df(<3)$; TLI(>.90); CFI(>.90); RMSEA(<.06); SRMR(<.08)



ML CFA

DATA: FILE = CFA.dat;

VARIABLE:

names = gender ca1-ca35;

usev = ca1-ca35;

ANALYSIS: estimator = ml;

MODEL:

f1 BY ca1 ca6 ca7 ca15 ca25 ca30;

f2 BY ca8 ca11 ca18 ca21 ca22 ca31;

f3 BY ca4 ca16 ca28 ca29 ca33 ca34;

f4 BY ca17 ca19 ca23 ca26 ca32 ca35;

f5 BY ca2 ca5 ca10 ca12 ca13 ca14;

f6 BY ca3 ca9 ca20 ca24 ca27;

OUTPUT: tech1 mod stdy svalues;

THE MODEL ESTIMATION TERMINATED
NORMALLY

MODEL FIT INFORMATION

Chi-Square Test of Model Fit

Value	1262.849
Degrees of Freedom	545
P-Value	0.0000

RMSEA (Root Mean Square Error Of
Approximation)

Estimate	0.061
90 Percent C.I.	0.057 0.065
Probability RMSEA <= .05	0.000

CFI/TLI

CFI	0.867
TLI	0.855
SRMR	0.057



修正指数

		M.I.	E.P.C.	Std E.P.C.	StdYX E.P.C.
BY Statements					
F1	BY CA8	12.949	0.353	0.233	0.299
F1	BY CA13	11.758	-0.320	-0.211	-0.241
F1	BY CA21	27.358	-0.473	-0.313	-0.435
F2	BY CA6	10.943	-0.380	-0.190	-0.218
F2	BY CA33	10.374	0.744	0.372	0.429
.....					
WITH Statements					
CA2	WITH CA1	10.486	0.088	0.088	0.190
CA4	WITH CA2	22.293	0.130	0.130	0.271
CA7	WITH CA6	39.768	0.116	0.116	0.461
CA8	WITH CA7	14.321	0.069	0.069	0.232
CA12	WITH CA10	10.989	0.110	0.110	0.196



ML CFA

MODEL:

...

ca7 with ca6;
ca23 with ca21;
ca26 with ca25;
ca17 with ca2;
ca30 with ca29;
ca4 with ca2;
ca29 with ca28;
ca32 with ca17;
f6 by ca13;
ca32 with ca13;
f1 by ca21;

THE MODEL ESTIMATION TERMINATED
NORMALLY

MODEL FIT INFORMATION

Chi-Square Test of Model Fit

Value	1012.034
Degrees of Freedom	534
P-Value	0.0000

RMSEA (Root Mean Square Error Of Approximation)

Estimate	0.050
90 Percent C.I.	0.046 0.055
Probability RMSEA <= .05	0.444

CFI/TLI

CFI	0.912
TLI	0.901
SRMR	0.052



Bayesian CFA

DATA: FILE = CFA.dat;

VARIABLE:

names = gender ca1-ca35;

usev = ca1-ca35;

ANALYSIS:

estimator = bayes;

proc = 2;

biterations = 100000(50000);

MODEL:

f1 BY ca1 ca6 ca7 ca15 ca25 ca30;

f2 BY ca8 ca11 ca18 ca21 ca22 ca31;

f3 BY ca4 ca16 ca28 ca29 ca33 ca34;

f4 BY ca17 ca19 ca23 ca26 ca32 ca35;

f5 BY ca2 ca5 ca10 ca12 ca13 ca14;

f6 BY ca3 ca9 ca20 ca24 ca27;

OUTPUT: tech1 tech8 stdy svalues;

PLOT: type = plot2;

THE MODEL ESTIMATION TERMINATED NORMALLY

USE THE FBITERATIONS OPTION TO INCREASE THE NUMBER OF ITERATIONS BY A FACTOR OF AT LEAST TWO TO CHECK CONVERGENCE AND THAT THE PSR VALUE DOES NOT INCREASE.

MODEL FIT INFORMATION

Bayesian Posterior Predictive Checking using Chi-Square

95% Confidence Interval for the Difference Between the Observed and the Replicated Chi-Square Values

615.218 777.250

Posterior Predictive P-Value 0.000



Bayesian CFA

MODEL:

f1 BY ca1 ca6 ca7 ca15 ca25 ca30;
f2 BY ca8 ca11 ca18 ca21 ca22 ca31;
f3 BY ca4 ca16 ca28 ca29 ca33 ca34;
f4 BY ca17 ca19 ca23 ca26 ca32 ca35;
f5 BY ca2 ca5 ca10 ca12 ca13 ca14;
f6 BY ca3 ca9 ca20 ca24 ca27;

ca1-ca35(P1-P35);

ca1-ca35 WITH ca1-ca35 (P36-P630);

model priors:

P1-P35~IW(1,41)

P36-P630~IW(0,41);

THE MODEL ESTIMATION TERMINATED NORMALLY

USE THE FBITERATIONS OPTION TO INCREASE THE NUMBER OF ITERATIONS BY A FACTOR OF AT LEAST TWO TO CHECK CONVERGENCE AND THAT THE PSR VALUE DOES NOT INCREASE.

MODEL FIT INFORMATION

Bayesian Posterior Predictive Checking using Chi-Square

95% Confidence Interval for the Difference Between the Observed and the Replicated Chi-Square Values

-113.418 92.423

Posterior Predictive P-Value 0.584



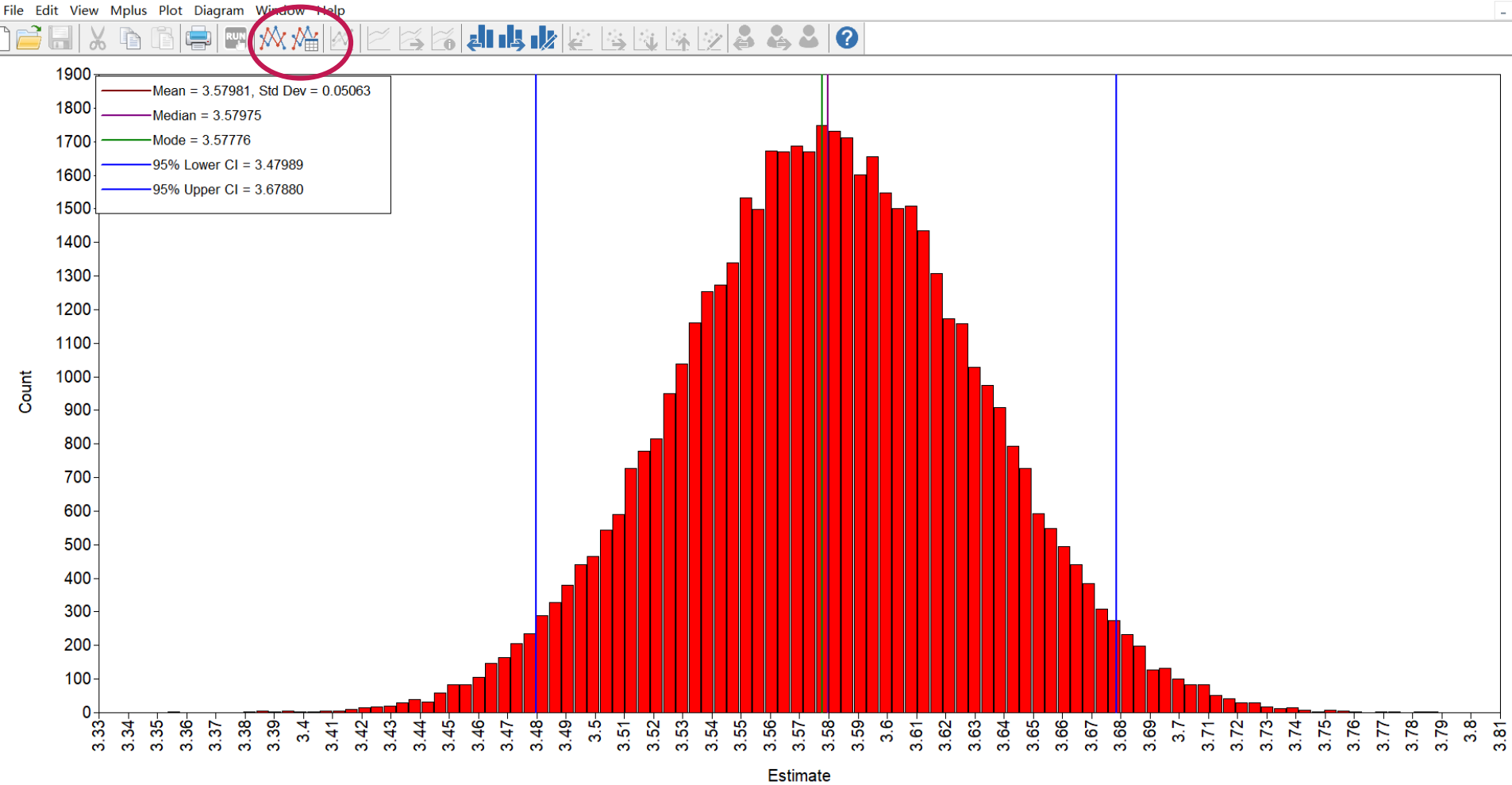
显著的测量误差相关

CA1 WITH

CA2	0.062	0.037	0.038	-0.006	0.139
CA3	0.051	0.039	0.087	-0.022	0.131
CA4	0.020	0.036	0.274	-0.044	0.097
CA5	-0.028	0.033	0.193	-0.092	0.038
CA6	-0.008	0.035	0.409	-0.068	0.070
CA7	-0.050	0.030	0.061	-0.103	0.015
CA8	0.007	0.030	0.404	-0.048	0.068
CA9	0.029	0.043	0.247	-0.051	0.119
CA10	0.021	0.036	0.270	-0.045	0.096
CA11	-0.011	0.027	0.349	-0.062	0.045
CA12	0.083	0.040	0.012	0.010	0.167
CA13	-0.044	0.031	0.079	-0.104	0.018
CA14	-0.030	0.027	0.140	-0.082	0.027
CA15	-0.001	0.042	0.492	-0.075	0.090
CA16	0.040	0.032	0.078	-0.014	0.111
CA17	-0.022	0.035	0.263	-0.088	0.049
CA18	0.005	0.030	0.429	-0.053	0.067
CA19	0.025	0.044	0.285	-0.060	0.113



Type = plot2





对比

传统方法

- 对模型限制过于严格
- 模型比较和修正过程都更为繁琐
- 且容易受到研究者主观选择的影响

贝叶斯结构方程模型

- 在一次估计中就可以放宽对所有交叉载荷和测量误差相关的限制，不需要进行多次修正
- 操作简单，拟合良好



- 《高级心理测量与潜变量建模》“贝叶斯结构方程模型”
- 张沥今, 陆嘉琦, 魏夏琰, 潘俊豪.(2019). 贝叶斯结构方程模型及其研究现状. *心理科学进展*, doi:10.12074/201812.00865
- 李锡钦. (2011). *结构方程模型: 贝叶斯方法* (蔡敬衡, 潘俊豪, 周影辉译). 北京: 高等教育出版社 .
- Lee, S. Y, & Song, X. Y. (2012). *Basic and advanced Bayesian structural equation modeling*. John Wiley & Sons, Ltd.



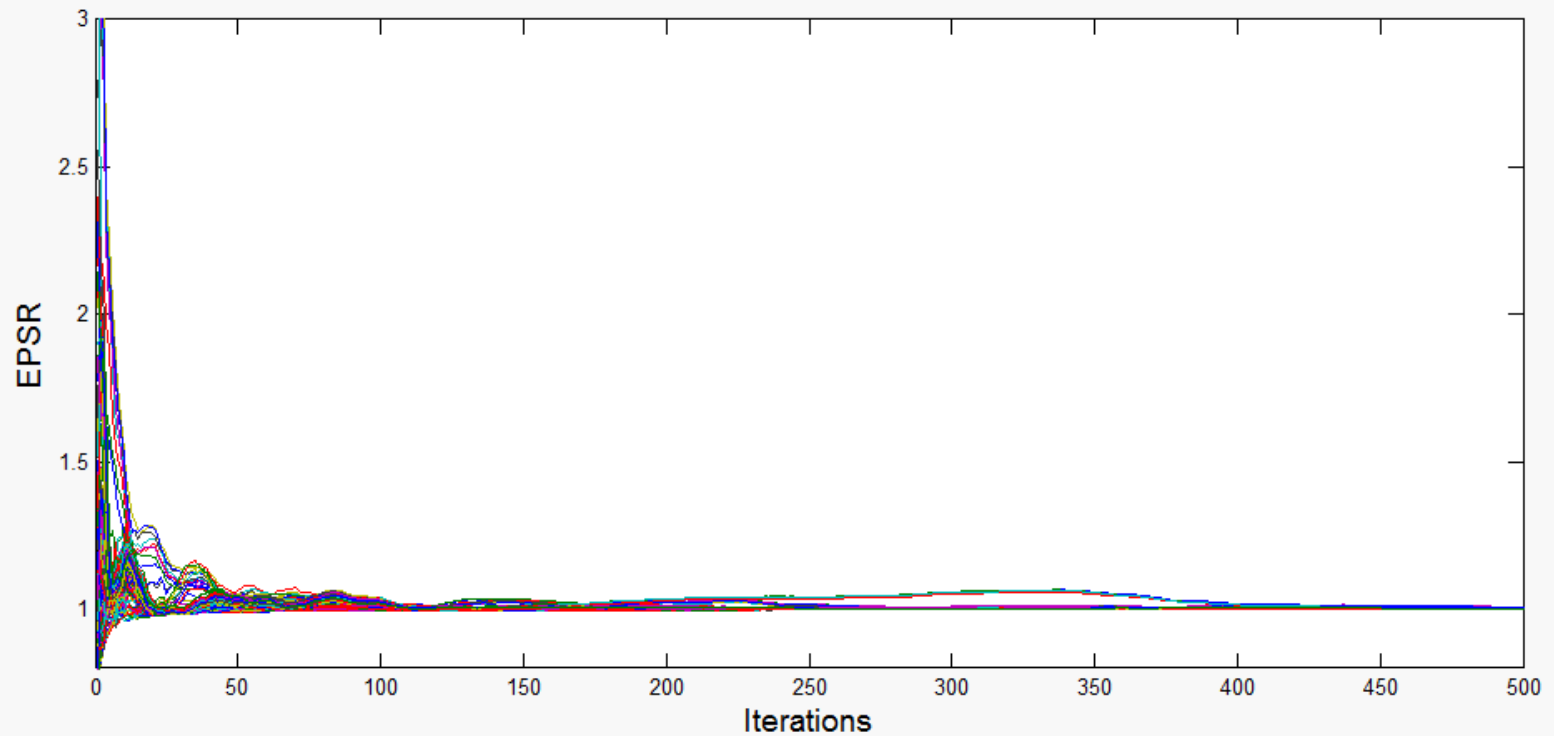
中山大學 心理學系
DEPARTMENT OF PSYCHOLOGY
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

Thanks!



收敛性判断

Estimated potential scale





ML CFA

OUTPUT: mod(3.84);

! 103个修正指数大于临界值的测量误差相关参数

CA2	WITH CA1	10.486	0.088	0.088	0.190
CA3	WITH CA1	5.357	0.075	0.075	0.146
CA4	WITH CA2	22.293	0.130	0.130	0.271
CA7	WITH CA1	8.312	-0.063	-0.063	-0.186
CA7	WITH CA6	39.768	0.116	0.116	0.461
CA8	WITH CA2	8.854	-0.072	-0.072	-0.176
CA8	WITH CA5	4.475	0.052	0.052	0.122
CA8	WITH CA7	14.321	0.069	0.069	0.232
CA10	WITH CA8	4.785	0.056	0.056	0.128
CA11	WITH CA8	3.949	0.042	0.042	0.122
CA11	WITH CA10	6.225	0.061	0.061	0.144
CA12	WITH CA1	7.277	0.081	0.081	0.157
CA12	WITH CA10	10.989	0.110	0.110	0.196
CA12	WITH CA11	5.128	0.058	0.058	0.131
CA14	WITH CA1	4.420	-0.046	-0.046	-0.125
CA14	WITH CA8	5.004	0.044	0.044	0.134
CA15	WITH CA14	5.992	0.052	0.052	0.148
CA16	WITH CA7	7.738	-0.050	-0.050	-0.172
CA16	WITH CA11	9.915	-0.062	-0.062	-0.186
CA16	WITH CA14	15.572	0.076	0.076	0.237
CA16	WITH CA15	16.058	0.089	0.089	0.242
CA17	WITH CA2	25.036	0.141	0.141	0.294
CA19	WITH CA6	3.945	-0.052	-0.052	-0.119
CA19	WITH CA9	5.037	0.095	0.095	0.128
CA19	WITH CA14	3.994	-0.055	-0.055	-0.115
CA19	WITH CA17	9.965	-0.110	-0.110	-0.181
CA20	WITH CA4	6.272	0.090	0.090	0.150
CA20	WITH CA9	10.703	0.177	0.177	0.241
CA20	WITH CA16	5.348	-0.072	-0.072	-0.143
CA21	WITH CA8	7.907	-0.058	-0.058	-0.176
CA21	WITH CA10	9.110	-0.072	-0.072	-0.176
CA21	WITH CA12	10.643	-0.081	-0.081	-0.190
CA21	WITH CA16	4.580	-0.041	-0.041	-0.128
CA22	WITH CA6	4.137	-0.040	-0.040	-0.125
CA22	WITH CA12	5.458	-0.065	-0.065	-0.134
CA22	WITH CA21	21.436	0.097	0.097	0.279
CA23	WITH CA1	13.469	-0.088	-0.088	-0.213
CA23	WITH CA12	8.958	-0.081	-0.081	-0.173
CA23	WITH CA16	9.343	-0.064	-0.064	-0.180
CA23	WITH CA18	4.427	0.048	0.048	0.121
CA23	WITH CA21	30.661	0.110	0.110	0.324
CA23	WITH CA22	17.676	0.094	0.094	0.242
CA24	WITH CA20	4.053	-0.097	-0.097	-0.135
CA25	WITH CA12	5.752	-0.069	-0.069	-0.138
CA25	WITH CA22	4.614	0.050	0.050	0.123
CA25	WITH CA23	8.890	0.068	0.068	0.172
CA26	WITH CA1	13.070	-0.086	-0.086	-0.213
CA26	WITH CA15	7.579	-0.063	-0.063	-0.166
CA26	WITH CA17	5.604	-0.061	-0.061	-0.145
CA26	WITH CA21	4.652	0.043	0.043	0.129
CA26	WITH CA23	16.952	0.092	0.092	0.250
CA26	WITH CA25	27.354	0.118	0.118	0.306
CA27	WITH CA1	4.432	-0.072	-0.072	-0.127
CA27	WITH CA3	11.519	0.190	0.190	0.297
CA27	WITH CA7	4.343	0.055	0.055	0.131
CA27	WITH CA8	9.067	0.091	0.091	0.182
CA27	WITH CA9	13.478	-0.184	-0.184	-0.256
CA27	WITH CA18	4.192	-0.066	-0.066	-0.121
CA27	WITH CA21	4.678	0.061	0.061	0.131
CA27	WITH CA24	15.163	0.177	0.177	0.250
CA28	WITH CA2	5.575	-0.052	-0.052	-0.139
CA28	WITH CA5	5.362	-0.052	-0.052	-0.134
CA28	WITH CA6	4.315	-0.036	-0.036	-0.130